【60】

氏　名	望　月　清（もち　づき　きよし）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論理博第228号
学位授与の日付	昭和43年1月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**On the large perturbation by a class of non—selfad joint operators** （ある種の非自己共役作用素による大きな摂動について）
論文調査委員	（主　査）教授 溝畑　茂　教授 楠　幸男　教授 吉沢尚明

論文内容の要旨

Ω を一般 Hilbert 空間とし，実軸上の (a,b) で定義された，Ω に値をとる二乗可積分函数 $f(x)$ 全体からなる空間を $\mathfrak{H}$ とする。すなわちその内積が

$$\int_a^b (f(x),g(x))_\Omega dx$$

で与えられる Hilbert 空間を考える。$\mathfrak{H}$ で定義された作用素 L_1:

$$L_1f=L_0f+Vf=xf(x)+\int_a^b v(x,y)f(y)dy$$

と L_0 との Similarity の研究ならびにそれの L_1 に関する散乱問題への応用がのべられている。ここで a, b は有限である必要はない。

この形の作用素は Friedrichs によって考えられたものであり（1938年），非有界自己共役作用素に対する摂動を数学的に論じたものとしては最初であろう。R^3 で定義された作用素$-\Delta+q(x)$は，そのFourier 像を考えることにより本質的には上の形の作用素の考察に帰着せしめられる。Friedrichs は $v(x,y)$ に対して，1) 任意の (x,y) に対して $v(x,y)$ は Ω の完全連続作用素である，2) $\|v(x,y)\|_\Omega$ が小である，3) $v(x,y)$ の (x,y) の従属性に関して Hölder 連続性，ならびに a, b の何れかが無限大になる場合には，$\|v(x,y)\|\leq c\ (1+|x|+|y|)^{-\delta}$, $\delta>½$, という仮定をおいて，$L_1=UL_0U^{-1}$ となるような有界作用素 U の存在を示した (similarity)。Faddeev は1963年に，$v(x,y)$ が対称性をもつ場合をとり上げ，上の条件2）の仮定がなくても L_0 と L_1 とのユニタリー同値性がなりたつことを示し，その推論を多体問題に関する散乱問題に応用した。

申請者は上の条件2）を仮定せず，かつ $v(x,y)$ の対称性をも仮定しない場合をとり扱っているが，結論としては対称性を仮定した場合の大部分の結果がやはりなりたつことを示している。Δ を実軸上の区間としよう。若干の仮定のもとで

$$E_1(\Delta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta\{R_1(\lambda+i\varepsilon)-R_1(\lambda-i\varepsilon)\}d\lambda,\quad (R_1(z)=(L_1-zI)^{-1}),$$

の存在が証明され，かつ $E_1(\Delta)^2=E_1(\Delta)$，$L_1E_1(\Delta)=E_1(\Delta)L_1$ をみたすことが示されている。またL_0, L_1をそれぞれ $E_0(\Delta)\mathfrak{H}$，$E_1(\Delta)\mathfrak{H}$ に制限して考えたものは互いに similar であることが示されている。すなわち，いわゆる wave operator$W^{(\pm)}$ (Δ) の存在が示されて，

$$L_1=W^{(\pm)}(\Delta)L_0W^{(\pm)}(\Delta)^{-1}$$

とかけることが証明されている。

以上の方法は，いわゆる stationary method とよばれるものであるが，この方法によってえられた wave operator が，time dependent method に対応する wave operator を与えていることも証明されている。

論文審査の結果の要旨

摂動項が対称性をもたない場合の研究は Friedrichs に始まるとはいえ，その摂動が小さいという仮定をとり除いて考えられたことは従来あまりなかった。そのとき如何なる困難さがあるのか，また如何なる条件がみたされていれば similarity がなりたつかということに対する問題提起もほとんどなかった。この方向に関しては，J. Schwartz の仕事（1960年）があったに過ぎない。しかし彼のおいた仮定は数多く，そのうちの何れが本質的なものであるかという吟味はなされていない。申請者はできるだけ一般な仮定のもとで問題をとりあげ，摂動項 V が非自己共役であることに起因する種々の困難さを指摘した。

この論文では，Friedrichs, Faddeev にしたがって，Fredholm 型積分方程式

$$[I+T(z)]\,f=f+\int_a^b\frac{v(x,y)}{y-z}f(y)dy$$

を考えるのであるが，その resolvent kernel を $v_1(x,y;z)$とすると，まず $z\notin[a,b]$ のときには，v_1の存在は Z が L_1 の固有値でないことと同等であることが示され，つづいて $\lambda\epsilon(a,b)$ に対しては，$v_1(x,y;\lambda\pm io)$ の存在はもはや一般には λ が L_1の固有値でないという仮定からはしたがわないことが実例によって示されている。この後者の事情は $v(x,y)$ が対称な場合と本質的に異なるものであり，この点を指摘した申者請の貢献は大きい。

つぎに実数 λ がある程度大であれば，仮定よりただちに $v_1(x,y;\lambda\pm io)$ の存在が示され，したがって実軸上の区間 Δ がある程度原点から離れている場合には，L_1 の実軸上でのスペクトル分解 $E_1(\Delta)$の具体的構成が可能であり，今までに自己共役の場合にえられている諸結果がそのままなりたつことが示されている。要するに，一般には $|\lambda|<R_0$ という範囲では V が自己共役でないために，L_1 のスペクトルは大変複雑なものになり，微細な研究が必要となるが，$|\lambda|\geq R_0$ ではスペクトルの受ける摂動は自己共役の場合と本質的な差がないことが明らかにされている。

参考論文 1 は Dirac 作用素に対する摂動について論じたものである。

$$L_1=L_0+V=\left(\sum_{k=1}^3 A_k\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}+A_4\right)+V(x)$$

を Fourier 像の空間で考えた場合，$V(x)$ は積分作用素

$$\int \hat{V}(\xi-\eta)\ \hat{f}(\eta)d\eta$$

に変換されるが，$V(x)$ が対称であると同時に，$|x|$ が十分大きいところでは，$V(x)=v(x)I$ となるような場合について（$v(x)$ は実数値函数），L_0 と L_1 とのユニタリー同値性を論じたものである。この方面の研究は少なく，申請者の貢献は大きい。

参考論文 2 は，いわゆる dissipative wave equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+b(x)\frac{\partial}{\partial t}-\Delta+c(x)\right)u(x,t)=f(x)e^{iwt},\quad b(x)\geq 0,$$

に対して極限振幅の原理がなりたつことを示したものであって，従来は $b(x)\equiv 0$ という場合にしか適用されていないこの原理が，もっと広く非自己共役の場合にも適用される可能性を示唆している。

参考文論 3 は，complex potential $q(x)$ をもった Schrödinger 作用素 $-\Delta+q(x)$ のスペクトル表示を取り扱っている。これは主論文の研究の具体的問題への発展応用とも考えられるが，それ自身興味ある結果がえられている。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。